47. Zeigen Sie
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.$$

48. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge positiver, reeller Zahlen.

    (a) Zeigen Sie die Ungleichungen
    $$\liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$
    Geben Sie zudem für jede Ungleichung ein Beispiel an, in dem echte Ungleichheit herrscht. Für den Fall, dass die Quotientenfolge nicht beschränkt sein sollte, nehmen Sie die Symbole $+\infty$ bzw. $-\infty$ als uneigentliche Grenzwerte, so wie in der VO behandelt.

    (b) Zeigen Sie, dass aus $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = a$.

49. Die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ seien $R_a \in (0,\infty)$ bzw. $R_b \in (0,\infty)$. Zeigen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$ einen Konvergenzradius $R \ge R_a R_b$ hat. Geben Sie ein Beispiel an, in dem $R > R_a R_b$ gilt.

50. Weisen Sie anhand der $\varepsilon - \delta$ Definition die Stetigkeit der folgenden Funktionen nach. Bei Teilaufgabe (c) ist die Stetigkeit im gegebenen Punkt x_0 zu zeigen.

    (a)
    $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad f(x) := x^3 - 4,$$

    (b)
    $$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad g(x) := \frac{x}{4+x^2},$$

    (c)
    $$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad h(x) = \begin{cases} 3x & x\in\mathbb{Q} \\ -3x & x\notin\mathbb{Q}. \end{cases} \qquad x_0 = 0.$$

51. Zeigen Sie: Für jede natürliche Zahl k größer als 1 ist die Funktion $w(x) := \sqrt[k]{x}$ gleichmäßig stetig auf $[0,\infty)$.